§ 1.

Definition der Konvergenz eines Matrixproduktes.

Sind A, B zwei n-reihige Matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot a_{1,n} \\ \text{— — — — — —} \\ a_{n,1} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot b_{1,n} \\ \text{— — — — — —} \\ b_{n,1} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot b_{n,n} \end{pmatrix},$$

so bezeichnet man als Produkt AB bekanntlich die Matrix

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot c_{1,n} \\ \text{— — — — — —} \\ c_{n,1} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot c_{n,n} \end{pmatrix},$$

deren Elemente die folgenden sind:

$$c_{i,k} = \sum_{r=1}^{n} a_{i,r}\, b_{r,k}.$$

Das Produkt ist assoziativ, aber im allgemeinen nicht kommutativ.

Liegt nun eine unendliche Folge von Matrices vor:

$$(1.) \quad A_\nu = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(\nu)} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot a_{1,n}^{(\nu)} \\ \text{— — — — — —} \\ a_{n,1}^{(\nu)} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot a_{n,n}^{(\nu)} \end{pmatrix} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

so bilden wir das Produkt

$$(2.) \quad P_\nu = \prod_{\lambda=0}^{\nu} A_\lambda = A_0 A_1 \ldots A_\nu = \begin{pmatrix} p_{1,1}^{(\nu)} \cdot\cdot\cdot\cdot p_{1,n}^{(\nu)} \\ \text{— — — — — —} \\ p_{n,1}^{(\nu)} \cdot\cdot\cdot\cdot p_{n,n}^{(\nu)} \end{pmatrix}.$$

Wenn es dann eintritt, daß das Verhältnis der n Elemente einer Kolonne von P_ν mit wachsendem ν einer Grenze zustrebt, und zwar für alle n Kolonnen der gleichen Grenze:

$$(3.) \quad \lim_{\nu=\infty} \left(p_{1,k}^{(\nu)} : p_{2,k}^{(\nu)} : \cdots : p_{n,k}^{(\nu)}\right) = \xi_1 : \xi_2 : \cdots : \xi_n,$$

so sagen wir, das unendliche Produkt $\prod\limits_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda$ konvergiert, und schreiben:

$$(4.) \quad \prod_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda = \xi_1 : \xi_2 : \cdots : \xi_n.$$