Wenn also

$$\lim_{\nu=\infty}\left(p_{1,k}^{(\nu)} : p_{2,k}^{(\nu)} : \cdots : p_{n,k}^{(\nu)}\right) = \xi_1 : \xi_2 : \ldots : \xi_n,$$

und etwa $\xi_s \neq 0$, so folgt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{q_{i,k}^{(\nu)}}{p_{s,k}^{(\nu)}} = \sum_{r=1}^{n} b_{i,r} \frac{\xi_r}{\xi_s}.$$

Setzt man daher

$$\sum_{r=1}^{n} b_{i,r}\, \xi_r = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

so ergibt sich:

$$\lim_{\nu=\infty}\left(q_{1,k}^{(\nu)} : q_{2,k}^{(\nu)} : \cdots : q_{n,k}^{(\nu)}\right) = \eta_1 : \eta_2 : \cdots : \eta_n.$$

Da die Determinante der Matrix B von Null verschieden vorausgesetzt ist, so können die η_i nicht sämtlich verschwinden.

Damit ist Satz 1 bewiesen. Wir bemerken ferner, daß ein konvergentes Matrixprodukt ungeändert bleibt (Gleichheit im Sinne unsrer Definition), wenn die Elemente eines Faktors alle mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert werden. In der Tat werden dann alle $p_{i,k}^{(\nu)}$ mit einem Faktor multipliziert, der bei dem Verhältnis $p_{1,k}^{(\nu)} : p_{2,k}^{(\nu)} : \cdots : p_{n,k}^{(\nu)}$ herausfällt.

---

§ 2.

Konvergenz bei positiven Elementen.

Wir wollen jetzt einige Konvergenzkriterien herleiten. Aus der Gleichung

$$A_0 A_1 \cdots A_\nu = P_\nu$$

folgt sofort

$$P_{\nu+1} = P_\nu A_{\nu+1},$$

oder also:

$$(5.) \quad p_{i,k}^{(\nu+1)} = \sum_{r=1}^{n} p_{i,r}^{(\nu)} a_{r,k}^{(\nu+1)} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots n).$$

Jetzt mögen zunächst die Elemente $a_{i,k}^{(\nu)}$ sämtlich reell und positiv sein. Dann sind auch die Zahlen $p_{i,k}^{(\nu)}$ positiv. Setzt man daher

$$(6.) \qquad \frac{p_{n,r}^{(\nu)}\, a_{r,k}^{(\nu+1)}}{p_{n,k}^{(\nu+1)}} = \lambda_{r,k}^{(\nu)} \quad (r, k = 1, 2, \cdots n).$$