§ 7.

Kettenbrüche mit alternierendem Bildungsgesetz.

In der Literatur kommen vielfach Kettenbrüche vor, deren Glieder kein einheitliches, sondern ein alternierendes Bildungsgesetz befolgen. Dieser Übelstand verschwindet, wenn man die Kettenbrüche durch Matrixprodukte ersetzt. Beispielsweise enthält die obige Formel (49.) einen solchen Kettenbruch, den man aber durch ein Matrixprodukt ersetzen kann, wodurch die bequemere Formel (48.) entsteht.

Um diese Möglichkeit allgemein zu untersuchen, gehen wir aus von dem Kettenbruch (35.). Dieser wird, wenn man ihn durch b_0 dividiert, und wenn $b_\lambda \neq 0$, $c_\lambda \neq 0$ ist, äquivalent mit

$$(50.)\qquad 1 + \frac{\frac{\Delta_0}{b_0\, c_0}\Big|}{\Big|\, 1} + \frac{\frac{d_0\, d_1}{c_0\, b_1}\Big|}{\Big|\, 1} + \frac{\frac{\Delta_1}{b_1\, c_1}\Big|}{\Big|\, 1} + \frac{\frac{d_1\, d_2}{c_1\, b_2}\Big|}{\Big|\, 1} + \cdots.$$

Wenn auch $d_\lambda \neq 0$, so ist dann nach Satz 5

$$(51.)\qquad \prod_{\lambda=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} = \begin{cases} b_0\, P : d_0, & \text{falls der Kettenbruch (50.) gleich } P \text{ ist,} \\ 1 : 0, & \text{falls der Kettenbruch (50.) unwesentlich divergiert.} \end{cases}$$

Liegt nun irgend ein mindestens im weitern Sinne konvergenter Kettenbruch mit alternierendem Bildungsgesetz vor, bei dem kein Teilnenner verschwindet, so kann man mit ihm gerade so verfahren wie soeben mit dem Kettenbruch (35.), d. h. man darf ihn in der Gestalt voraussetzen:

$$(52.)\qquad 1 + \frac{\alpha_1\big|}{\big|1} + \frac{\beta_1\big|}{\big|1} + \frac{\alpha_2\big|}{\big|1} + \frac{\beta_2\big|}{\big|1} + \cdots,$$

wo also alle Teilnenner gleich 1 sind. Der Kettenbruch (52.) sei gleich $\frac{A}{B}$, wobei im Fall unwesentlicher Divergenz $B = 0$, $A \neq 0$ zu setzen ist.

Um den Kettenbruch (52.) mit (50.) zu idenficieren, hat man

$$\frac{a_\lambda\, d_\lambda}{b_\lambda\, c_\lambda} - 1 = \frac{\Delta_\lambda}{b_\lambda\, c_\lambda} = \alpha_{\lambda+1}, \qquad \frac{d_\lambda\, d_{\lambda+1}}{c_\lambda\, b_{\lambda+1}} = \beta_{\lambda+1}$$

zu setzen. Diese Gleichungen gestatten unendlich viele Auflösungen; am einfachsten ist folgende:

$$\begin{aligned} a_\lambda &= 1 + \alpha_{\lambda+1}, & b_\lambda &= \beta_{\lambda+1}, \\ c_\lambda &= 1\qquad\qquad, & d_\lambda &= \beta_{\lambda+1}. \end{aligned}$$